4 Didaktische Prinzipien des Mathematikunterrichts

Didaktische Prinzipien sind (wie alle Prinzipien) keine starren Handlungsanweisungen oder Rezepte, sie sind Vorschläge, Anregungen und Strukturierungshilfen. In den letzten Jahrzehnten wurden von den Mathematikdidaktikern eine Vielzahl solcher Prinzipien formuliert. Teilweise werden unter dem selben Namen zwei verschiedene Dinge verstanden, teilweise werden zwei verschiedene Prinzipien mit dem selben Namen bezeichnet. Insgesamt ist die Lage verwirrend. Für eine erste Annäherung an dieses Thema werde ich nur wenige Prinzipien herausgreifen, die ich persönlich für besonders wichtig halte.

4.1 Das EIS-Prinzip

Ein mathematischer Sachverhalt kann nach J. Bruner auf drei verschiedene Arten dargestellt werden:

- enaktiv, d.h. handelnd,
- ikonisch, d.h. bildlich,
- symbolisch, d.h. verbal oder formal

Aus diesem Ansatz des letzten Kapitels können wir eine Empfehlung für den Unterricht gewinnen:

EIS-Prinzip:

> Ein mathematischer Sachverhalt sollte möglichst in allen drei Darstellungsebenen – enaktiv, ikonisch, symbolisch – erfasst werden.
>
> Auf den Transfer zwischen den drei Repräsentationsmodi sollte besonderes Gewicht gelegt werden

Der letzte Satz ist nach dem vorangegangenen fast selbstverständlich, wird aber manchmal auch gesondert als Prinzip vom intermodalen Transfer bezeichnet.

Als prototypisches Beispiel dient die Addition: Das Zusammenfügen von zwei Mengen wird handelnd dargestellt. 3 Mädchen und 4 Jungen gehen zusammen ins Kino. Wie viele Eintrittskarten müssen Sie kaufen? Der Vorgang kann zeichnerisch dargestellt und schließlich symbolisch notiert werden: $3 + 4 = 7$.

An diesem Beispiel sehen Sie schon, dass sich das EIS-Prinzip in der Grundschule auf breiter Front durchgesetzt hat. In früheren Zeiten war es aber durchaus üblich, auch in der ersten Klasse nur auf symbolischem Niveau zu arbeiten, d.h. das kleine Einsundeins auswendig zu lernen. Das Ziel ist natürlich auch heute die symbolische Beherrschung der Addition, aber man erhofft sich zu Recht von der Verankerung in den beiden anderen Repräsentationsebenen ein tieferes Verständnis.

Die Einteilung in drei Sparten ist recht grob, feinere Einteilungen sind denkbar.
Bei der Handlungsebene kann man noch unterscheiden, ob der Schüler

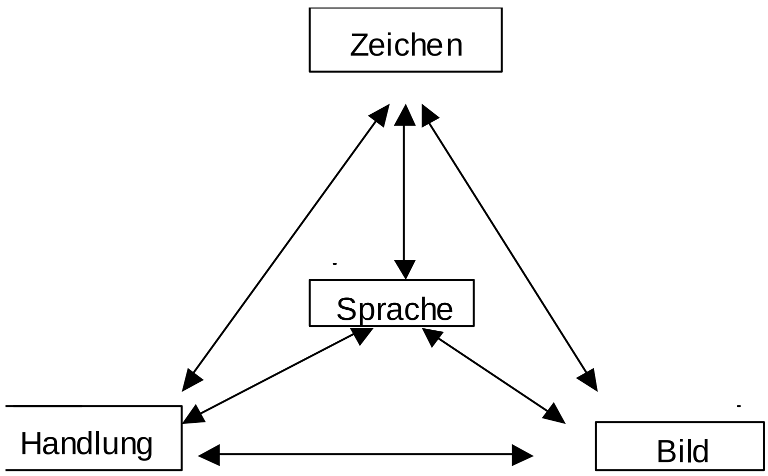
- die Handlung selbst ausführt
- die Handlung miterlebt
- die Handlung erzählt bekommt und sie sich vorstellt

Aufgabe 4.1.1

Überlegen Sie sich Abstufungen des ikonischen Darstellungsmodus.

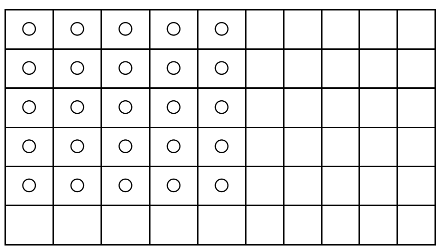
Bei der symbolischen Ebene scheint eine weitere Unterteilung am notwendigsten. Sowohl die sprachliche Formulierung als auch die formale Darstellung in mathematischen Symbolen zählen ja als symbolische Darstellungen. Die Sprache ist uns aber wesentlich vertrauter, beim intermodalen Transfer spielt sie eine besondere Rolle. Man könnte also auch von vier Darstellungsarten sprechen, oder der Sprache eine Sonderrolle zuweisen.

Die möglichen Übergänge werden dann durch Doppelpfeile dargestellt.



Bruner legt besonderen Wert darauf, dass diese Doppelpfeile wirklich auch in beiden Richtungen begangen werden. Das Bild soll also seiner Meinung nach nicht als Stufenmodell verstanden werden, das in der symbolischen Darstellung die höchste Ebene sieht, in den anderen Ebenen nur Vorformen der letztlich anzustrebenden symbolischen Darstellung. Erst die Verbindung aller Darstellungsebenen gibt ein tiefes Verständnis eines Sachverhalts. Dies wird von anderen Autoren nicht so extrem gesehen. Zech etwa meint, dass mit zunehmendem Alter der Schüler die enaktive Ebene an Bedeutung verliert, da die Schüler sich Handlungen immer besser vorstellen können. Zweifellos behält aber der ikonische Repräsentationssmodus seine Bedeutung für jede Altersstufe.

Ein Erlebnis bei einem Montessori-Kurs hat mir gezeigt, dass die enaktive Ebene auch noch für Erwachsene wichtig sein kann. Der Kursleiter gab uns ein Brett zum Wurzelziehen. In Form eines quadratischen Gitters waren Vertiefungen in ein Holzbrett gebohrt. Die Wurzel aus 25 bestimmten wir, indem 25 Perlen so in dieses Raster gelegt wurden, dass ein volles Quadrat entstand. Ich habe staunend gesehen, welche Begeisterung dies bei normalen Erwachsenen hervorrufen konnte. Mehrere Personen versicherten überzeugend, dass Sie jetzt zum ersten Mal „begriffen“ hätten, was die Wurzel einer Zahl ist.



Maria Montessori hat schon vor Bruner auf die Wichtigkeit des handelnden Zugangs zu mathematischen Sachverhalten hingewiesen.

Vorschlag:
Besuchen Sie das Montessori-Studio im Gebäude W und besichtigen Sie die dortigen Materialien zum Mathematikunterricht, z.B. zum Bruchrechnen.

Im Buch von Zech finden Sie auf Seite 107 das Beispiel der Begriffe ganze Drehung, halbe Drehung, Vierteldrehung nach links bzw. nach rechts durchgeführt. Daran anschließend finden Sie einige Beispiele zum Ikonisieren.

Das Ikonisieren ist schon seit langem die beliebteste Art, abstrakte Vorgänge und Begriffe zu veranschaulichen. Descartes gilt z.B. als Erfinder der Methode, Funktionen durch ihre Graphen zu veranschaulichen, Gauss erfand die Darstellung der komplexen Zahlen als Punkte der komplexen Zahlenebene.

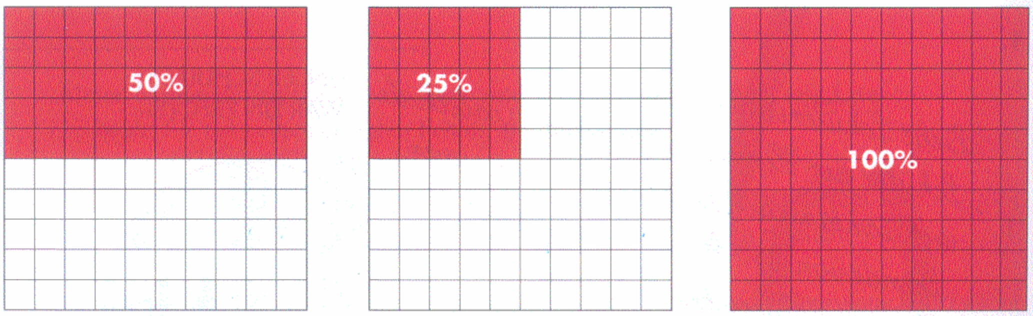
Aufgabe 4.1.2
Versuchen sie, die folgenden Begriffe, bzw. Operationen zu ikonisieren, enaktivieren, verbalisieren, formalisieren.

a) Quadrat
b) Flächeninhalt eines Rechtecks
c) Kürzen eines Bruches
d) Achsenspiegelung
e) Ableitung einer Funktion

Als weiteres Beispiel wähle ich die Prozentrechnung. In allen Schulbüchern werden Prozentsätze durch Graphiken dargestellt. Hier ist ein Beispiel eines „Prozentblattes" aus Mathematik heute, Klasse 7, Schroedel Verlag.

(2) Veranschaulichen von Prozentangaben

Prozentangaben kann man auch gut an einem Quadrat mit 100 Kästchen veranschaulichen.



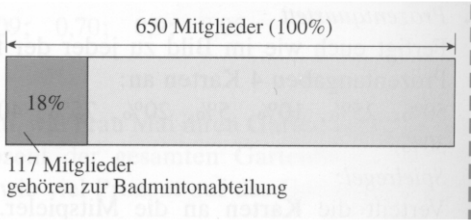
50 von 100 Kästchen sind rot gefärbt. Das sind $\frac{50}{100}$, also die Hälfte des ganzen Quadrates.

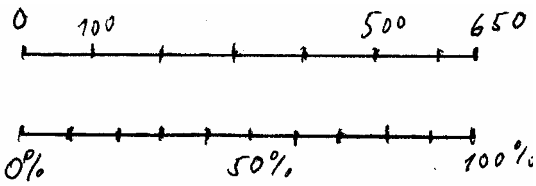
25 von 100 Kästchen sind rot gefärbt. Das sind $\frac{25}{100}$, also ein Viertel des ganzen Quadrates.

100 von 100 Kästchen sind rot gefärbt. Das sind $\frac{100}{100}$, also das Ganze des Quadrates.

Eine weitere Möglichkeit der Ikonisierung ist eine Doppelskala. Aus dem selben Schulbuch:

Das *Ganze* (650 Mitglieder) ist der **Grundwert.**
Der *Anteil am Ganzen* (18%) heißt **Prozentsatz.**
Die *Größe des Teils* (117 Mitglieder) heißt **Prozentwert.**





Mit Hilfe eines Gummibandes kann man diese Vorstellung auch enaktivieren. Die untere Skala wird durch ein Gummiband mit einer Prozentskala ersetzt. Jetzt kann man dieses Band an verschiedene Grundwerte anpassen.

Aufgabe 4.1.3
Überlegen Sie, wie man mit diesem Gummiband die drei Grundaufgaben der Prozentrechnung näherungsweise lösen kann.

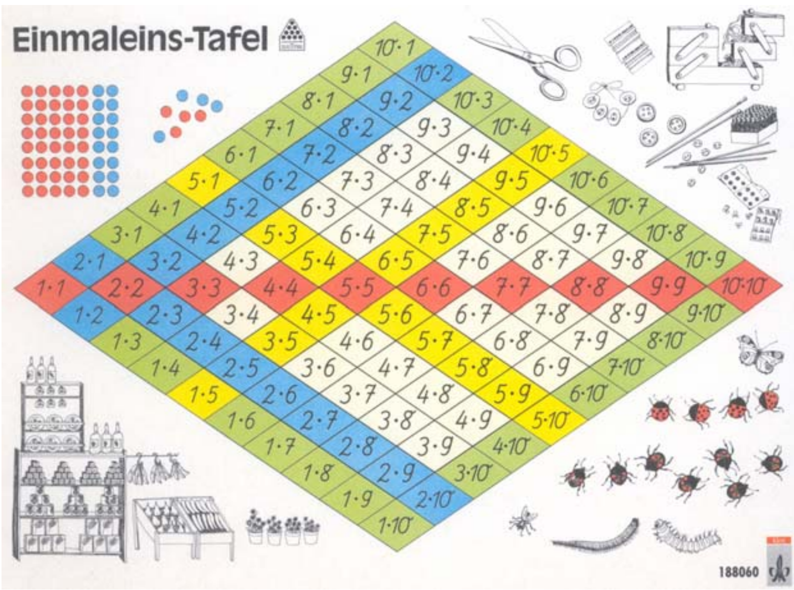
4.2 Operative Prinzipien

Im weiteren Sinn werden so alle Prinzipien genannt, die sich aus dem Piagetschen Begriff der Operation herleiten, also auch das EIS-Prinzip.
Im engeren Sinn bedeutet das für mich, dass

- Kompositionsfähigkeit
- Assoziativität
- Reversibilität

eine wichtige Rolle beim Einführen und Üben eines mathematischen Gebietes spielen. Als Beispiel dient hier das kleine Einmaleins.

Im Zahlenbuch für das 2. Schuljahr aus dem Klettverlag findet man folgende Einmaleins-Tafel.



Im linken oberen Eck sehen Sie ein Punktefeld, mit dem man sich Multiplikationsaufgaben veranschaulichen kann (denken Sie an die Flächeninhalte bei Aebli).
Die Tafel selbst gibt einen Überblick über die Aufgaben, die vorkommen können. Dabei sind grundlegende Rechnungen (etwa die Verdoppelungen) farbig gekennzeichnet. Wichtig ist, dass jede weiße Aufgabe eine farbige Nachbaraufgabe hat. Dadurch ist sie über das farbige Feld erreichbar.
6*7 = 5*7 +7
8*7 = 7*7 *7
usw.
Es genügt also, zunächst nur die Zweierreihe, die Fünferreihe und die Quadratzahlen auswendig zu können, alles andere kann man sich dann durch Additionen erschließen.

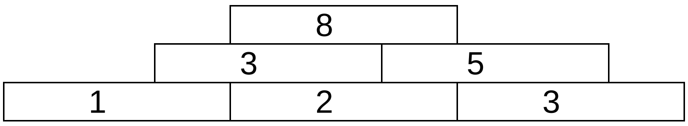
Hier sieht man deutlich die Kompositionsfähigkeit und die Assoziativität. Die Reversibiltät wird deutlich bei Aufgaben der Form

Welche Multiplikationen aus der Einmaleinstafel haben das folgende Ergebnis:

a) 21
b) 24
c) 25
d) 23

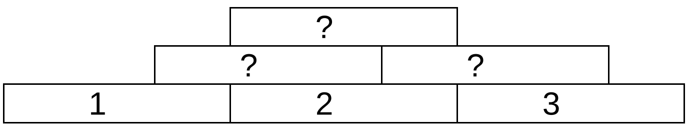
Die Einmaleins-Tafel ist ein gutes Beispiel für den eher ganzheitlichen Charakter des operativen Übens. Gegenbeispiel wäre das isolierte Lernen und Üben der einzelnen Einmaleins-Reihen: Zweierreihe, Fünferreihe, Viererreihe, Dreierreihe usw. (Dabei sind natürlich die Übergänge fließend. Natürlich wird auch beim „isolierten“ Üben der Reihen auf ihre Beziehungen untereinander eingegangen, beim einen Lehrer mehr, beim anderen weniger).

Ein viel genanntes Beispiel des operativen Übens ist die Zahlenmauer, die vor allem in Übungen der Grundschule vorkommt. Dort wird sie vor allem beim Üben der Addition verwendet. Die Zahl in einem Baustein soll die Summe der beiden unteren Bausteine sein.

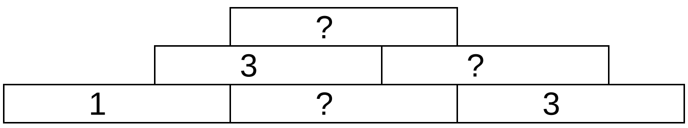


Durch Offenlassen von Bausteinen entstehen jetzt verschiedene Aufgaben:

Die einfachste:



Etwas schwieriger:



Oder noch schwieriger:

		8			
	?		?		
1		?		3	

Ist diese Aufgabe schwieriger oder einfacher?

		8			
	?		?		
?		?		?	

Bei der letzten Aufgabe wird am deutlichsten, dass es dem Erfinder der Aufgaben auf Kompositionsfähigkeit, Assoziativität und Reversibilität angekommen ist. Diese Eigenschaften der Addition werden auch bei den folgenden Fragen deutlich:

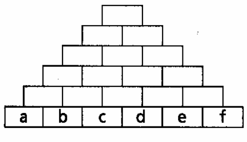
Was geschieht, wenn ich die Zahl ganz links unten um 1 erhöhe?
Was geschieht, wenn ich die Zahl unten in der Mitte um 1 erhöhe?

Bei diesen Fragen soll das „Funktionale Denken“ angeregt werden.

Das folgende Beispiel stammt aus „Das Zahlenbuch, Klass 6“ Klett u. Balmer Verlag.

Sechsstöckige Zahlenmauern untersuchen

8 Wie ändert sich der Deckstein?



a.

a	b	c	d	e	f
1	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8

b.

a	b	c	d	e	f
1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
4	8	12	16	20	24

Fahre weiter. Was entdeckst du?

Weitere Aufgaben aus diesem Buch:

Vertausche in der oben abgebildeten roten Zahlenmauer zwei, drei oder gar vier Grundsteine. Überlege wie sich der Deckstein verändert. Prüfe nach.

Verändere einen einzigen Grundstein. Als Deckstein soll dabei 100, 110, 120,… herauskommen. Wie viele verschiedene Lösungen findest du?

Aufgabe 4.2.1
Übertragen Sie diese Übungsform auf Stoffgebiete der Sekundarstufe I.

a) Addieren von Brüchen
b) Addieren von ganzen Zahlen
c) Addieren von rationalen Zahlen
d) Multiplizieren von ganzen Zahlen

Erich Ch. Wittmann weist auf die Bedeutung von strukturiertem Übens hin. Wenn die Aufgaben nicht zufällig zusammengestellt sind, sondern in einem Zusammenhang stehen, werden die Schüler beim Üben zum Nachdenken angeregt.

Beispiel einer Aufgabe:

a) 5* (-2)
b) 4*(-2)
c) 3*(-2)
d) 2*(-2)

Was fällt dir auf? Wie geht es weiter?

Außer der reinen Übung wird der Schüler auch zum funktionalen Denken angeregt. Auch das Verbalisieren spielt hier eine wichtige Rolle. Falls bisher nur Aufgaben des Typs „Plus mal Minus“ besprochen wurden, kann hier sogar zur Regel „Minus mal Minus“ übergeleitet werden (Permanenzprinzip).

Aufgabe 4.2.2
Entwerfen Sie strukturierte Übungen dieser Art zu

a) Multiplikation von Brüchen
b) Division von Brüchen
c) Potenzieren von ganzen Zahlen
d) Wurzelziehen

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Prozentrechnung. Wenn wir sie gemäß den operativen Prinzipien behandeln, so legen wir Wert auf die Kompositionsfähigkeit, die Assoziativität und die Reversibilität.
Wir gehen aus vom grundlegenden Zusammenhang:

Prozentsatz = Teil durch das Ganze

bzw. in der (für Schüler recht verwirrenden) Fachsprache

$$\mathrm{Pr}\,ozentsatz = \frac{\mathrm{Pr}\,ozentwert}{Grundwert}$$

Wenn Prozentwert und Grundwert gegeben sind, kann ich den Prozentsatz ausrechnen. Es gibt zwei Umkehraufgaben, die Berechnung des Prozentwertes und die Berechnung des Prozentsatzes, wenn die jeweils fehlenden Größen gegeben sind. Als Anhänger der operativen Prinzipien werden wir auch diese beiden Umkehraufgaben kräftig üben, um ein vertieftes Verständnis des Prozentrechnens zu erreichen. Hier setzt nun Zech allerdings ein dickes Fragezeichen. Die Berechnung des Grundwertes fällt schwächeren Schülern schwer, sie scheint diese eher zu verwirren, als zu einem vertieften Verständnis beizutragen. Da außerdem die Berechnung des Grundwertes in den Anwendungen keine große Rolle spielt, plädiert Zech in seinem Buch „Mathematik erklären und verstehen“ dafür, diese

Grundaufgabe manchen Schülern zu ersparen und warnt davor, die operativen Prinzipen allzu extrem anzuwenden.

Ich habe Ihnen bis jetzt nur Beispiele für die Anwendung der operativen Prinzipien beim Üben gegeben. Diese Prinzipien durchziehen aber den ganzen Unterricht, insbesondere bei der Einführung eines neuen Gebiets kann man sie berücksichtigen. Allerdings besteht auch hier die Gefahr der Übertreibung. Wer bei der Addition zu schnell die Subtraktion, beim Potenzieren zu schnell das Wurzelziehen einführt, beim Prozentrechnen zu schnell die Berechnung des Grundwerts, wird die Schüler verwirren. Wer allerdings zu lange isoliert einzelne Gebiete übt, wird bei den vermischten Aufgaben eine böse Überraschung erleben.

Die letzten Überlegungen sollen Sie darauf hinweisen, dass die operativen Prinzipien (wie alle didaktischen Prinzipien) nur grobe Richtlinien und Ideengeber, nie aber starre Rezepte sein können.

4.3 Weitere didaktische Prinzipien

Wie schon erwähnt gibt es in der Literatur eine Vielzahl von didaktischen Prinzipien, die sich teilweise überlappen und ergänzen. Ich nenne hier noch einige, ohne näher auf sie einzugehen.

Es gibt eine Vielzahl von **Variationsprinzipien**. Das EIS-Prinzip und die operativen Prinzipien können als Variationsprinzipien angesehen werden. Allgemein bedarf Lernen sicher einer gewissen Variation des Dargebotenen. Allerdings ist auch hier wieder die Gefahr, dass zuviel Variation das Lernen behindert.

Aufgabe 4.3.1
Was konnte man denn noch variieren außer den Darstellungsebenen?

Das **Prinzip des aktiven Lernens** wird von Erich Ch. Wittmann (in Grundfragen des Mathematikunterrichts) folgendermaßen formuliert:

> „Der Lehrer sollte sich darüber im klaren sein, dass seine Instruktion wirkungslos bleibt, wenn sie nicht durch eine aktive Konstruktion seitens des Schülers ergänzt wird. Daher müssen Aktivitäten organisiert werden, die den Schüler in eine intensive Auseinandersetzung mit dem Gegenstand bringen."

Aufgabe 4.3.2
Was wäre denn passives Lernen. Wer von Ihnen kann das passive Lernen verteidigen?

Das **Spiralprinzip** von Jerome Bruner: Um den Kindern einen Gegenstand in einer Form nahe zu bringen, die sie verstehen, ist nach Bruner zweierlei nötig:

a) Der Stoff ist auf früher Stufe in einer intuitiven Form zu vermitteln
b) Er muss später in einer dem Alter angemessenen Form erneut behandelt werden.

Anmerkung: Bruner war kein Mathematiker. Unter Spirale verstand er, anders als wir, eine Schraubenlinie (Spiralfeder in Opas Sofa).

Aufgabe 4.3.3

Vergleichen Sie die Gebiete Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung bezüglich der schulischen Behandlung unter dem Gesichtspunkt des Spiralprinzips.

Aufgabe 4.3.4

Lesen sie in „Grundkurs Mathematikdidaktik“ von Zech den entsprechenden Abschnitt 4.2 zu den operativen Prinzipien.